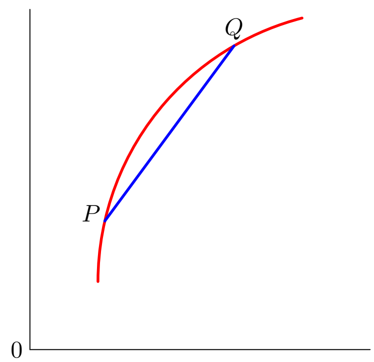
TEMA 4: DERIVADAS

1. La derivada de una función. Reglas de derivación

1.1. **La pendiente de una curva.** La pendiente de una curva en un punto P es una medida de la inclinación de la curva en ese punto. Si Q es un punto cerca de P en la curva, entonces la pendiente de la curva en P es aproximadamente igual a la pendiente del segmento de recta $\overline{PQ}$. La *pendiente de la curva* en P se define como el límite de la pendiente de $\overline{PQ}$ cuando Q se aproxima a P a lo largo de la curva.



En símbolos, la pendiente de la curva en $P = \lim_{Q\to P}(\text{pendiente de } \overline{PQ})$.

Para encontrar la pendiente de la curva $y = x^2$ en el punto $P = (1, 1)$ escogemos un punto Q en la curva cerca de P. Sea $1 + h$ con h pequeño, la coordenada en x del punto Q. La coordenada en y del punto Q es $(1 + h)^2$. Calculamos

$$\text{pendiente de } \overline{PQ} = \frac{(1+h)^2 - 1}{(1+h) - 1} = 2 + h.$$

Cuando Q se aproxima a P, h tiende a 0. Así:

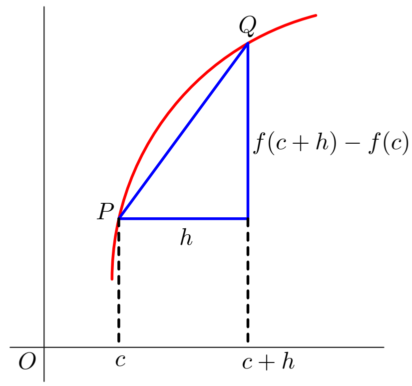
$$\text{pendiente de la curva en } (1,1) = \lim_{h\to 0}(2 + h) = 2.$$

Definición 1.1. La derivada de la función f en el punto c, denotada por $f'(c)$, es la pendiente de la curva $y = f(x)$ en el punto $(c, f(c))$, Esto es:

$$f'(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h},$$

siempre que el límite exista.

Diremos que f es *derivable* en el punto c si $f'(c)$ existe.



1.2. **Tabla de derivadas de funciones elementales básicas.**

(1) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ (α es cualquier número real).
(2) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.
(3) $(a^x)' = a^x \ln a$, en particular, $(e^x)' = e^x$.
(4) $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$.
(5) $(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$.
(6) $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, ($x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, n entero).
(7) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(-1 < x < 1)$.
(8) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(-1 < x < 1)$.
(9) $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

1.3. **La recta tangente a una curva.** La recta tangente a una curva en un punto se define como la recta que pasa por el punto y cuya pendiente es igual a la pendiente de la curva en ese punto. Así,

$$y - f(c) = f'(c)(x-c)$$

es la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $P = (c, f(c))$.

Ejemplo 1.2.

(1) Encuentre la recta tangente a $y = \sqrt{x}$ en $(16, 4)$.

Solución: $f(x) = x^{1/2}, \quad f'(x) = \dfrac{1}{2}x^{-1/2}, \quad f'(16) = \dfrac{1}{8}$.

Por lo que, $y - 4 = \dfrac{1}{8}(x-16)$, o $y = \dfrac{1}{8}x + 2$.

(2) Encuentre la recta tangente a $y = |x|$ en $(0, 0)$.

Solución: No existe recta tangente a $y = |x|$ en $(0, 0)$, puesto que la función $f(x) = |x|$ no es derivable en $x = 0$. Para ver esto, note que el límite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}$$

no existe (el límite por la izquierda es -1 y el límite por la derecha es 1).

1.4. **Derivadas laterales.** Si existe el límite

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \qquad \left(\lim_{h\to 0^-} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}\right),$$

entonces este límite es llamado la *derivada por la derecha* (*por la izquierda*) de la función f en el punto c y es denotado por $f'(c^+)$ ($f'(c^-)$).

Teorema 1.3. *$f'(c)$ existe si y sólo si, ambas $f'(c^+)$ y $f'(c^-)$ existen y son iguales. En este caso, $f'(c) = f'(c^+) = f'(c^-)$.*

Ejemplo 1.4. Es la función $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x \leq 0; \\ xe^{-1/x}, & \text{si } x > 0. \end{cases}$ derivable en $x = 0$?

Solución: Sí, y $f'(0) = 0$.

$$f'(0^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{h^2}{h} = 0;$$

$$f'(0^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{he^{-1/h}}{h} = e^{-\infty} = 0.$$

1.5. **Continuidad y derivabilidad.** La continuidad es una condición necesaria para la derivabilidad. En otras palabras, una función discontinua en un punto no es derivable en ese punto.

Teorema 1.5. *Sea f una función derivable en c. Entonces, f es continua en c.*

Proof. Usando el hecho de que f es derivable en c, el límite

$$f'(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

existe. Queremos probar que f es continua en c, esto es, $\lim_{h\to 0} f(c+h) = f(c)$ o, equivalentemente, que $\lim_{h\to 0} \big(f(c+h) - f(c)\big) = 0$. Para obtener esto, consideremos lo siguiente:

$$\lim_{h\to 0} \frac{h}{h}\big(f(c+h) - f(c)\big) = \lim_{h\to 0} h \cdot \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} = 0 \cdot f'(c) = 0.$$

□

Ejemplo 1.6. Discutir la derivabilidad de la función $f(x) = \begin{cases} ax - x^2, & \text{si } x < 1; \\ b(x-1), & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$, donde $a, b \in \mathbb{R}$.

Solución: Primero estudiamos la continuidad. El dominio de f es toda la recta real. Para $x < 1$ y $x > 1$ la función viene expresada por funciones elementales, las cuales son continuas. Queda por considerar el punto frontera $x = 1$. Tenemos que $f(1) = 0$ y $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} ax - x^2 = a - 1$. Así, f es continua en 1 sí, y sólo si $a = 1$. Resumiendo:

> Si $x \neq 1$, entonces f es continua para cualquier valor de a y b, y en $x = 1$, f es continua sí, y sólo si $a = 1$ (b un valor arbitrario).

Ahora vamos con la derivabilidad. Claramente, f es derivable en cualquier punto $x \neq 1$. Cuando $a \neq 1$, f no es derivable en $x = 1$ puesto que no es continua en ese punto. Por lo tanto, vamos a considerar $a = 1$.

$$\begin{aligned} f'(1^-) &= \lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{(1+h)-(1+h)^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^-} \frac{(1+h)-(1+2h+h^2)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h-h^2}{h} = -1; \\ f'(1^+) &= \lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{b(1+h-1)}{h} = b. \end{aligned}$$

Por consiguiente, $f'(1^-) = f'(1^+) = f'(1)$ sí, y sólo si $b = -1$. Resumiendo:

Si $x \neq 1$, entonces f es derivable para cualquier valor de a y b, y en $x = 1$, f es derivable sí, y sólo si $a = 1$ y $b = -1$.

1.6. **Reglas de derivación.** Sean f y g funciones derivables en $x = c$. Entonces, la suma, diferencia, producto por un escalar, producto y cociente son derivables en $x = c$ (en el último caso cuando $g'(c) \neq 0$).

(1) Suma: $(f + g)' = f' + g'$;
(2) Diferencia: $(f - g)' = f' - g'$;
(3) Producto por un escalar: $(\lambda f)' = \lambda f'$, $\lambda \in \mathbb{R}$;
(4) Producto: $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$;
(5) Cociente: $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$, $g'(c) \neq 0$.

1.7. **Regla de la cadena.** (Derivada de una función compuesta). Sea f una función derivable en $x = c$ y sea g derivable en $f(c)$. Entonces la composición $g \circ f$ es derivable en $x = c$ y la derivada

$$(g \circ f)(c) = g'(f(c)) \cdot f'(c).$$

Ejemplo 1.7. Encuentre la derivada de $h(x) = \sqrt{e^x - x^2}$ en el punto $x = 1$.

Solución: La función $h = g \circ f$ es la composición de $f(x) = e^x - x^2$ y $g(x) = \sqrt{x}$. Aplicando la regla de la cadena encontramos que $f'(x) = e^x - 2x$ y $g'(x) = 1/(2\sqrt{x})$, por lo que $f'(1) = e - 2$ y $g'(f(1)) = g'(e - 1) = 1/(2\sqrt{e - 1})$. Así,

$$h'(1) = g'(f(1)) \cdot f'(1) = \frac{e - 2}{2\sqrt{e - 1}}.$$

Ejemplo 1.8. Encuentre la derivada de $\operatorname{sen}(3^x + x^3)$.

Solución: Podemos representar la función de la forma $y = \operatorname{sen} t$ donde $t = 3^x + x^3$. Usando la regla de la cadena obtenemos

$$y' = (\operatorname{sen} t)'|_{t=3^x+x^3}(3^x + x^3)' = \cos(3^x + x^3)(3^x \ln 3 + 3x^2).$$

Ejemplo 1.9. Sea f una función derivable. Entonces

- $\left(e^{f(x)}\right)' = f'(x)e^{f(x)}$;
- $\left(a^{f(x)}\right)' = (\ln a)f'(x)a^{f(x)}$.
- $(\ln f(x))' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$;
- $(\arctan f(x))' = \dfrac{f'(x)}{1 + f^2(x)}$.

1.8. **Derivada de la función inversa.** Sea f una función continua en el intervalo $[c - \delta, c + \delta]$ que contiene a c, y verificando que la inversa de f existe en este intervalo y que f es derivable en c. Entonces, f^{-1} es derivable en $y = f(c)$ y la derivada

$$\left(f^{-1}(y)\right)' = \frac{1}{f'(c)}. \tag{1.1}$$

La prueba de esta afirmación es muy fácil si usamos la regla de la cadena. Para ello, derivamos la siguiente igualdad:

$$c = (f^{-1} \circ f)(c).$$

Obtenemos

$$1 = \left(f^{-1}(f(c))\right)' \cdot f'(c),$$

y por lo tanto el resultado, si llamamos $y = f(c)$.

Ejemplo 1.10. Probar que $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Solución: La función $\arctan x$ es la inversa de la función $\tan x$. De acuerdo con la fórmula (1.1)

$$(\arctan y)' = \frac{1}{1+\tan^2 x},$$

ya que $(\tan x)' = 1 + \tan^2 x$, y donde $y = \tan x$. Así,

$$(\arctan y)' = \frac{1}{1+y^2}.$$

Por supuesto, podemos cambiar el nombre de la variable y por x y obtener el resultado.

1.9. **Usando la derivada para aproximar valores de la función.** La recta tangente a una curva en el punto $(c, f(c))$ coincide con la curva en el punto de tangencia, y constituye una buena aproximación de la curva en los puntos cerca de $(c, f(c))$. De hecho, una función es derivable en un punto cuando el gráfico de la función en ese punto puede ser aproximado por una línea recta (la recta tangente).

Así, para valores pequeños de h, el valor de $f(c+h)$ puede ser aproximado usando $f(c)$ y $f'(c)$:

$$f(c+h) \approx f(c) + f'(c)h. \tag{1.2}$$

Ejemplo 1.11. Sin el uso de la calculadora, dé un valor aproximado de $\sqrt{0.98}$.

Solución: Consideremos la función $f(x) = \sqrt{1+x}$. Note que $f(0) = 1$, $f(-0.02) = \sqrt{0.98}$, $f'(x) = \dfrac{1}{2}(1+x)^{-1/2}$, $f'(0) = 0.5$. Usando (1.2) con $c = 0$ y $h = -0.02$ tenemos que

$$\sqrt{0.98} = f(0 - 0.02) \approx f(0) + f'(0)(-0.02) = 1 + 0.5(-0.02) = 0.99.$$

2. Algunos teoremas sobre funciones derivables

2.1. **Monotonía.** La función f se dice que es *creciente en el punto* c si existe un intervalo alrededor del punto c en el cual $f(x) > f(c)$ para $x > c$, $f(x) < f(c)$ para $x < c$.

El decrecimiento de la función en un punto puede ser definido de forma análoga.

Por ejemplo, $x = 0$ es un punto de crecimiento de x^3, pero no de x^2.

Teorema 2.1. *Si la función f es derivable en el punto c y $f'(c) > 0$ ($f'(c) < 0$), entonces f crece (decrece) en el punto c.*

El teorema establece sólamente una condición suficiente, puesto que $x = 0$ es un punto de crecimiento de $f(x) = x^3$ pero $f'(0) = 0$.

Los siguientes resultados se refieren a la monotonía de una función derivable en un intervalo.

Teorema 2.2. *Para que la función f derivable en un intervalo I sea creciente (decreciente) es necesario y suficiente que para todo $x \in I$ se cumpla que $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$).*

Teorema 2.3. *Si $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) para todo $x \in I$, entonces f es estrictamente creciente (decreciente) en el intervalo I.*

Ejemplo 2.4. Encuentre los intervalos en los que $f(x) = 3x - x^3$ es creciente o decreciente.

Solución: Tenemos que $f'(x) = 3 - 3x^2 = 3(1 - x^2)$. Puesto que $f'(x) > 0$ para $x \in (-1, 1)$ y $f'(x) < 0$ para $x \in (-\infty, 1)$ y $x \in (1, +\infty)$, Se sigue que f es estrictamente creciente en $[-1, 1]$ y estrictamente decreciente en $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$.

2.2. **Extremos locales de las funciones.** La derivada es una herramienta muy útil para localizar e identificar valores (extremos) máximos y mínimos de funciones. En lo que sigue, supondremos que la función f está definida en un intervalo abierto $(c-\delta, c+\delta)$ que contiene a c.

Definición 2.5. La función f tiene un máximo (mínimo) local en el punto c si existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in (c-\delta, c+\delta)$

$$f(x) \leq f(c) \qquad (f(x) \geq f(c)).$$

Un máximo local (mínimo local) es un extremo local de f.

Teorema 2.6. *Si la función f tiene un extremo en el punto c, entonces la derivada $f'(c)$ o es cero o no existe.*

Proof. Sin pérdida de generalidad, supongamos que c es un mínimo local de f y que $f'(c)$ existe. Por la definición de mínimo local, tenemos que $f(c+h) \geq f(c)$ para todo h con $|h| < \delta$. Sea $h > 0$ y considere el cociente

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h}.$$

Este cociente es no-negativo y el límite existe cuando $h \to 0$, que es igual a $f'(c)$, puesto que f es derivable en c. Dado que el límite de cantidades no-negativas debe ser no-negativa, obtenemos la desigualdad $f'(c) \geq 0$. Considere ahora $h < 0$. Entonces, el cociente arriba es una cantidad no-positiva. Tomando el límite cuando $h \to 0$ obtenemos la desigualdad inversa $f'(c) \leq 0$. Por lo que $f'(c) = 0$ y con esto hemos terminado. □

Los puntos donde la función no es derivable o donde la derivada se anula son posibles extremos de f, y por esa razón, son llamados *puntos críticos* de f.

Ejemplo 2.7. Encuentre los puntos críticos de $f(x) = 3x - x^3$ y $g(x) = |x|$.

Solución: La función f es derivable en toda la recta real y $f'(x) = 3(1-x^2)$. Así, $f'(x) = 0$ sí, y sólo si $x = \pm 1$. Por tanto, los puntos críticos de f son 1 y -1. La función g es derivable en toda la recta real excepto en $c = 0$, donde hay una esquina. En realidad, la derivada

$$g'(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x > 0; \\ -1, & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

nunca se anula. En consecuencia, 0 es el único punto crítico de g.

Teorema 2.8. *Suponga que f es derivable en un intervalo abierto $I = (c-\delta, c+\delta)$ alrededor de c (excepto, tal vez, en el punto c). Entonces, si la derivada de f cambia de signo positivo a negativo (de negativo a positivo) cuando pasa por el punto c, entonces f tiene un máximo (mínimo) local en el punto c. Si la derivada no cambia de signo cuando pasa por el punto c, entonces la función f no posee un valor extremo en el punto c.*

Ejemplo 2.9. Encuentre los valores extremos locales de $f(x) = 3x - x^3$ y $g(x) = |x|$.

Solución: Sabemos por el Ejemplo 2.4 que el signo de f' cambia de negativo a positivo en -1 y de positivo a negativo en 1, por tanto -1 es un mínimo local y 1 es un máximo local de f. Por otro lado, el signo de g' cambia de negativo a positivo en 0 (ver Ejemplo 2.7), por tanto, aunque g no es derivable en 0, g tiene un mínimo local en ese punto.

2.3. **Teoremas de Rolle y Lagrange.**

Teorema 2.10 (Teorema de Rolle)**.** *Si la función f satisface las siguientes condiciones:*

(1) f es continua en $[a,b]$;
(2) f es derivable en (a,b);
(3) $f(a) = f(b)$.

Entonces existe un punto $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$.

El teorema de Rolle afirma que existe un punto $c \in (a,b)$ tal que la recta tangente al gráfico de la función f en el punto $(c, f(c))$ es paralela al eje de coordinadas x.

Ejemplo 2.11. Sea $f(x) = x^2 - 3x + 2$. Demostrar, usando el teorema de Rolle, que existe un c tal que $f'(c) = 0$.

SOLUCIÓN: $f(x) = x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$ es continua en todo $\mathbb{R}$, en particular en $[1,2]$. $f'(x) = 2x - 3$, por lo que f es derivable en todo $\mathbb{R}$, en particular en $(1,2)$. Y en los extremos del intervalo ocurre que $f(1) = f(2) = 0$. Por el teorema de Rolle, existe $c \in (1,2)$ tal que $f'(c) = 0$. Esto es, $f'(c) = 2c - 3 = 0$. Esto ocurre cuando $c = 3/2$.

Teorema 2.12 (Teorema de Lagrange). *Si al función f satisface las siguientes condiciones:*

(1) f es continua en $[a,b]$;
(2) f es derivable en (a,b).

Entonces existe un punto $c \in (a,b)$ tal que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).$$

El teorema de Lagrange es conocido como el Teorema del Valor Medio. También puede ser interpretado de la siguiente manera: El número

$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

es la pendiente de la recta r que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ de la gráfica de f, y $f'(c)$ es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en $(c, f(c))$. La fórmula de Lagrange muestra que esta recta tangente es paralela la recta r.

Ejemplo 2.13. Sea $f(x) = 5 - \frac{4}{x}$. Aplicar el Teorema del Valor Medio en $[1,4]$.

SOLUCIÓN: La función $f(x) = 5 - \frac{4}{x}$ es continua en $[1,4]$ y $f'(x) = \frac{4}{x^2}$, por lo que f es derivable en $(1,4)$. Por el teorema del Valor Medio, existe $c \in (1,4)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(4) - f(1)}{4-1} = \frac{4-1}{4-1} = 1$$

Para hallar el valor c, vemos que $f'(c) = \frac{4}{c^2} = 1$. Por tanto, $c = 2 \in (1,4)$.

3. Regla de L'Hopital

Ahora presentaremos una técnica útil para evaluar límites que utiliza las derivadas de las funciones involucradas.

Teorema 3.1 (Indeterminación del tipo 0/0). *Supongamos que se cumplen las siguientes condiciones:*

(1) Las funciones f y g están definidas y son derivables en un intervalo $I = (c-\delta, c+\delta)$ alrededor del punto c (excepto, tal vez, para el punto c);
(2) $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = 0$;
(3) La derivada $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in I$ (excepto, tal vez, para el punto c).
(4) Existe el límite $\lim_{x\to c} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Entonces,

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Ejemplo 3.2. Evaluar el $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} ax}{\tan bx}$, donde $a, b \in \mathbb{R}$.

Solución: El límite es de la forma indeterminada $0/0$. Es fácil verificar que se cumplen todas las condiciones del Teorema 3.1. En consecuencia,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} ax}{\tan bx} = \lim_{x\to 0} \frac{a\cos ax}{\frac{b}{\cos^2 bx}} = \frac{a}{b}.$$

Teorema 3.3 (Indeterminación del tipo $\pm\infty/\infty$)**.** *Supongamos que se cumplen las condiciones (1), (3) y (4) del Teorema 3.1 y que la condición (2) es reemplazada por*

(2') $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = \pm\infty$.

Entonces,

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Ejemplo 3.4. Evaluar el $\lim_{x\to 0^+} x\ln x$.

Solución: El límite es de la forma indeterminada $0\cdot\infty$. Escribiendo $x\ln x$ como $\dfrac{\ln x}{1/x}$ obtenemos una indeterminación de la forma ∞/∞. Aplicando la regla de L'Hopital tenemos que

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0.$$

Observación 3.5. De manera similar a los teoremas 3.1 y 3.3, la regla de L'Hopital puede también ser usada cuando $x\to +\infty$ o $x\to -\infty$,

$$\lim_{x\to \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Ejemplo 3.6. Evaluar $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x}$.

Solución: El límite es de la forma indeterminada ∞/∞. Derivando arriba y abajo, obtenemos que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} = 0.$$

Observación 3.7. Formas indeterminadas de otros tipos, $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 1^∞, 0^0 o ∞^0 pueden ser reducidas a la forma indeterminada del tipo $0/0$ o ∞/∞ y a estas podemos aplicar la regla de L'Hopital.

Ejemplo 3.8. Evaluar $\lim_{x\to\infty} x^{1/x}$.

Solución: El límite es de la forma indeterminada ∞^0. Representamos $x^{1/x} = e^{\ln x/x}$ y estudiamos $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, por tanto, el límite es $e^0 = 1$.

Ejemplo 3.9. Evaluar el $\lim_{x\to 1} \left(\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x}\right)$.

Solución: El límite es de la forma indeterminada $\infty-\infty$. Si combinamos las fracciones, entonces obtenemos

$$\frac{x\ln x - (x-1)}{(x-1)\ln x},$$

que es de la forma $0/0$ en $x=1$. Derivando arriba y abajo, obtenemos que

$$\frac{\ln x}{1 - x^{-1} + \ln x}$$

que es de nuevo una indeterminación de la forma 0/0 en $x = 1$. Derivando de nuevo arriba y abajo nos dá que

$$\frac{x^{-1}}{x^{-2} + x^{-1}} = \frac{x}{1 + x}$$

cuyo límite es $1/2$ cuando $x \to 1$. Así, hemos aplicado la regla de L'Hopital dos veces para obtener que el límite es $1/2$.

Cuando las hipótesis de los teoremas no se cumplen, podemos obtener respuestas incorrectas, como ocurre en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.10. Claramente, $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{-\infty}{0^+} = -\infty$. Si intentamos utilizar la regla de L'Hopital, obtendríamos

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^{-1}}{1} = +\infty$$

Este resultado es incorrecto. Note que el límite no es una indeterminación, por tanto los teoremas 3.1 y 3.3 no aplican.

4. Extremos de funciones continuas en intervalos cerrados $[a, b]$

Considere una función continua f definida en un intervalo cerrado $I = [a, b]$. Por el Teorema de Weierstrass, f alcanza en $[a, b]$ extremos globales. Por otro lado, si los extremos globales están en el intervalo abierto (a, b) entonces un extremo global es también un extremo local. En ese caso, ellos deben ser puntos críticos de f. Por tanto, para localizar y clasificar los extremos globales de f, usaremos la siguiente receta:

(1) Encontrar los puntos críticos de f en (a, b);
(2) Evaluar f en los puntos críticos encontrados en (a) y en los extremos del intervalo, a, b;
(3) Seleccionar el valor máximo (máximo global) y el valor mínimo (mínimo global).

Ejemplo 4.1. Encuentre y clasifique los puntos extremos de $f(x) = 3x - x^3$ en el intervalo $[-2, 2]$.

Solución: Ya que f es continua en $I = [-2, 2]$ siendo I cerrado y acotado, por el Teorema de Weierstrass, f alcanza en I máximo y mínimo global. Entonces, como se explicó anteriormente, los posibles extremos globales están entre los puntos críticos de f en I y los puntos extremos del intervalo I: -2 y 2. Sabemos que $-1 \in I$ es un mínimo local, $f(-1) = -2$, y $1 \in I$ es un máximo local, $f(1) = 2$, ver Ejemplo 2.9. Por otro lado, $f(-2) = 2$ y $f(2) = -2$, por lo tanto, los puntos -1 y 2 son ambos mínimos globales de f en I, y los puntos -2 y 1 son ambos máximos globales de f en I.

5. Derivadas de orden superior

Si la derivada f' de la función f está definida en un intervalo $(c - \delta, c + \delta)$ alrededor del punto c, entonces la *segunda derivada* de f es la derivada de la función f', y es denotada por f''. La *tercera derivada* se define como la derivada de la segunda derivada y así sucesivamente. La tercera derivada es denotada por f''' . De manera general, la derivada de orden n es denotada por $f^{(n)}$, y una vez calculada la derivada de orden $(n-1)$, la de orden n viene dada por $f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'$.

Ejemplo 5.1. Dadas las funciones $f(x) = 4x^4 - 2x^2 + 1$, $f'(x) = 16x^3 - 4x$, $f''(x) = 48x^2 - 4$, $f'''(x) = 96x$, $f^{(4)}(x) = 96$ y $f^{(n)}(x) = 0$ para todo $n \geq 5$.

5.1. **Convexidad y puntos de inflexión de una función.** Supongamos que la función f tiene derivada finita en cada punto del intervalo (a, b). Entonces, para cada punto en (a, b) la gráfica de la función tiene recta tangente no paralela al eje de coordenadas y.

Definición 5.2. La función f se dice que es convexa (cóncava) en el intervalo (a, b) si, en (a, b), la gráfica de f se encuentra por encima (por debajo) de cualquier recta tangente.

Teorema 5.3 (Una condición suficiente para la convexidad/concavidad)**.** *Si f tiene segunda derivada en (a, b) y $f''(x) \geq 0$ ($f''(x) \leq 0$) par todo $x \in (a, b)$, entonces f es convexa (cóncava) en (a, b).*

Definición 5.4. Un punto c es un punto de inflexión de la función f si en ese punto la función cambia la curvatura, de convexa a cóncava o de cóncava a convexa.

Teorema 5.5 (Una condición necesaria para los puntos de inflexión)**.** *Si f tiene un punto de inflexión en c y f'' es continua en un intervalo alrededor de c, entonces $f''(c) = 0$.*

Teorema 5.6 (Una condición suficiente para los puntos de inflexión)**.** *Si f'' existe en un intervalo alrededor de c, con $f''(c) = 0$, y los signos de f'' por la izquierda y por la derecha del punto c son diferentes, entonces c es un punto de inflexión de f.*

Ejemplo 5.7. Encontrar los puntos de inflexión y discutir la concavidad/convexidad de la gráfica de $f(x) = x^4 - 4x^3$.

Solución: Derivando dos veces se obtiene $f(x) = x^4 - 4x^3$, $f'(x) = 4x^3 - 12x^2$ y $f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x - 2)$.

Haciendo $f''(x) = 0$, los posibles puntos de inflexión son $x = 0$ y $x = 2$. Observamos que $f''(x) > 0$ para todo $x \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$ y $f''(x) < 0$ para todo $x \in (0, 2)$. Por el Teorema 5.6, ambos son puntos de inflexión. Por otro lado, tenemos que por el Teorema 5.3 , f es convexa en $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$ y f es cóncava en $(0, 2)$.

El recíproco del teorema 5.5 no es cierto. Así ocurre para la gráfica de $f(x) = x^4$. La segunda derivada $f''(x) = 12x^2$ es 0 en $x = 0$, pero el punto $(0, 0)$ no es un punto de inflexión, $f''(x) > 0$ en $(-\infty, 0)$ y en $(0, \infty)$. Por lo que f es convexa en esos intervalos.